ELSEVIER
Bull. Sci. math. 130 (2006) 162–178
BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
www.elsevier.com/locate/bulsci

Solutions analytiques globales de problèmes linéaires avec argument absorbant

Kaddour Guerbati [a,b], Mustapha Mechab [b,*]

[a] *Département de Mathématiques, Université de Ouargla, B.P. 511 Route de Ghardaıa, 30000 Ouargla, Algérie*
[b] *Laboratoire de Mathématiques, Université Djilali Liabès, B.P. 89, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie*

Reçu le 27 juillet 2005 ; accepté le 29 septembre 2005

Disponible sur Internet le 10 novembre 2005

Résumé

Le but de notre travail est l'étude du problème de Cauchy pour une large classe d'opérateurs linéaires, non nécessairement kowalevskiens, avec argument absorbant de la variable spatiale. On montre l'existence et l'unicité d'une solution du problème dans l'espace des fonctions analytiques par rapport au temp et de classe Gevrey par rapport à la variable d'espace. Les outils utilisés sont inspirés des travaux [Cl. Wagschal, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pure Appl. 58 (1979) 309–337 ; D. Gourdin, M. Mechab, Solution globale d'un problème de Cauchy linéaire, J. Funct. Anal. 202 (2003) 123–146], qui eux même basés sur les normes formelles de Leray et Waelbroeck [J. Leray, L. Waelbroeck, Norme formelle d'une fonction composée (Préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts), in : Colloque de Liège, CBRM, 1964, pp. 145–152. [23]].
© 2005 Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The aim of this work is the study of the Cauchy problem for a large class of linear operators, non-necessarily kowalevskian, with shrinking argument. We prove the well posedness of this problem in the space of analytic functions with respect to time and Gevrey class with respect to spatial variable. Our tools are based on formal norms of Leray and Waelbroeck [J. Leray, L. Waelbroeck, Norme formelle d'une fonction composée (Préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts), in: Colloque de Liège, CBRM, 1964, pp. 145–152. [23]], already used in [Cl. Wagschal, Le problème de Goursat non

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : guerbati_k@yahoo.com (K. Guerbati), mechab@univ-sba.dz, mechab@yahoo.com (M. Mechab).

0007-4497/$ – see front matter
doi:10.1016/j.bulsci.2005.09.002

linéaire, J. Math. Pure Appl. 58 (1979) 309–337; D. Gourdin, M. Mechab, Solution globale d'un problème de Cauchy linéaire, J. Funct. Anal. 202 (2003) 123–146].

1. Introduction

Depuis les travaux de J. Hadamard, E.E. Levi, I. Petrowski, du début du siecle dernier, il est connu que le problème de Cauchy, pour des opérateurs aux dérivées partielles non kowalevskiens, n'est pas en général bien posé dans des classes de fonctions suffisamment régulières. Dans [15], J. Hadamard exhibe une fonction $f(t,x)$ pour laquelle le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(t,x)u = 0$$

n'admet pas de solution continue (voire aussi l'exemple de E. De Giorgi [9]). De même que I. Petrowski, dans [26], a établi la non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs paraboliques.

Une autre entrave à la résolution du problème de Cauchy linéaire sont les oscillations des coefficients de l'opérateur considéré. On retrouve ce problème posé dans [8] et abondament repris durant la dernière décénie par plusieurs mathématiciens (voir [20,27–29]). Une façon d'atténuer la rapidité de ces oscillations est de faire intervenir un facteur mutliplicatif petit. Cette idée a déjà été proposée par J.L. Lions, en 1977 dans une conférence à Rio de Janero [25], pour des équations de Kirchhoff. Dans [11], le deuxième auteur, en collaboration avec D. Gourdin, ont étudié l'effet de ce facteur sur la durée de vie des solutions du problème de Cauchy ainsi que sur leur stabilité. L'idée d'introduction d'un paramètre externe pour la résolution de problèmes liés à des équations aux dérivées partielles remonte déjà au travaux de Cauchy [7] ; le but initial étant l'approximation de la solution du problème considéré.

On retrouve l'introduction d'un paramètre externe dans divers domaines et pour des objectifs et buts différents. A titre illustratif, on peut citer le travail de V.I. Rodionov [30], où il montre l'analyticité de la solution d'un problème d'EDO avec un paramètre variant avec le temps. D'autres travaux, comme [13,14], se sont intéressés au comportement oscillatoire des solutions de certains problèmes liés à des équation différentielles fonctionnelles dépendant d'un paramètre. Dans [21], l'auteur confronte la méthode de l'optique géométrique avec la résolution d'un problème d'ependant d'un paramètre. En mécanique on retrouve l'exemple des équations de Kirchhoff dépendant d'un paramètre multiplicatif des variables spaciales [11,25].

Dans notre travail, on s'interresse à la résolution du problème de Cauchy linéaire pour des équations de la forme

$$D_t^p u(t,x) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{j+q=0}^{\kappa} a_{j,q}(t,x) D_x^q D_t^j u(t,mx) + f(t,x)$$

où $m \in]0,1[$. On voit que, lorsque $\kappa > p$, on se retrouve avec des équations non résolubles ou non kowalevskiennes. En adaptant les techniques de [10,12,31], on démontre l'existence et l'unicité d'une solution, du problème de Cauchy associé à ces équations, dans l'espace des fonctions analytiques par rapport au temps et de classe Gevrey par rapport à la variable spaciale.

Nous faison remarquer que ce type de problèmes a été traité localement dans [5,16,18] et que dans [19] Kawagishi et Yamanaka ont étudié le problème de Cauchy pour une équation de la chaleur, perturbée par un opérateur avec argument multiplicatif pour la variable d'espace. Par ailleurs, quand $m = 1$ et $\kappa \leqslant p$ on retrouve le résultat de [12] mais dans le cas où $\kappa \geqslant p$ l'approche de ce dernier travail devient inopérante.

Enfin, ce qui pourrait attirer l'attention du lecteur est l'appélation de l'action du paramètre m quand il est strictement inférieur à 1. Elle est présentée, par certains, comme *Retard* (cf. [1,2,5]), par d'autre comme *Déviation* (cf. [3,4,14]) ou comme *Absorption* ou *Schrinking* (cf. [16–18]. Pour ce qui nous concerne, nous avons opté pour la notion d'absorption. Quand $m > 1$, son action est présentée comme *Avance* dans [6].

2. Définitions et résultat

Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{I}$ (respectivement de $\mathcal{J}$) seront noté t (respectivement x) et on utilisera les notations classiques

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

et C désignera une constante universelle positive.

Pour $d \geqslant 1$, on désignera par $\mathcal{E}^{(d)}(\mathcal{J})$ l'algèbre des fonctions φ infiniment différentiables sur $\mathcal{J}$ telles que

$$\forall h > 0,\ \exists C \geqslant 0;\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D^k\varphi(x)\right| \leqslant C h^k k!^d \tag{1}$$

$\mathcal{E}^{(0,d)}(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$ l'algèbre des fonctions u continues sur $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ et admettant des dérivées de tout ordre par rapport à x et telles que :

$$\forall h > 0,\ \exists C \geqslant 0;\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I}, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D_x^k u(t,x)\right| \leqslant C h^k k!^d \tag{2}$$

et $\mathcal{A}^1(\mathcal{I})$ l'algèbre des fonctions ψ infiniment différentiables sur $\mathcal{I}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists C_n > 0,\ \forall t \in \mathcal{I}, \quad \left|D^n\psi(t)\right| \leqslant C_n n! \quad \text{avec} \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n < +\infty. \tag{3}$$

On remarquera que $\mathcal{E}^{(d)}(\mathcal{J})$ est l'algèbre projective des fonctions de classes Gevrey sur $\mathcal{J}$, $\mathcal{E}^{(0,d)}(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$ l'algèbre des fonctions continues par rapport à $t \in \mathcal{I}$ et de classe Gevrey par rapport à $x \in \mathcal{J}$ (i.e. $C(\mathcal{I}, \mathcal{E}^{(d)}(\mathcal{J}))$) et les élements de $\mathcal{A}^1(\mathcal{I})$ sont des fonctions uniformément analytiques sur $\mathcal{I}$.

Définition 1. Soit $\sigma \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$. On dit qu'une fonction u est dans $\mathcal{G}^{(\sigma,d)}(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$, si elle est infiniment différentiable sur $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ et si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h > 0,\ \exists C_{n,h} > 0; \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} C_{n,h} < +\infty \quad \text{et} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I}, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}} |D_t^n D_x^k u(t,x)| \leqslant C_{n,h} n!^\sigma h^k k!^d. \end{cases} \tag{4}$$

Si $\sigma = 1$, on utilisera la notation $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$, donc $u \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{I}\times\mathcal{J})$ si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h > 0,\ \exists C_{n,h} > 0; \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} C_{n,h} < +\infty \quad \text{et} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I}, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}} |D_t^n D_x^k u(t,x)| \leqslant C_{n,h} n! h^k k!^d. \end{cases}$$

Convention. Pour tous les espaces $\mathcal{F}$ qu'on a introduit avant, on dira qu'une fonction u est de classe $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si pour tous $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, intervalles ouverts bornés, $u_{/\mathcal{I}}$, respectivement $u_{/\mathcal{I}\times\mathcal{J}}$, est de classe $\mathcal{F}$.

Etant donnée B une partie finie de l'ensemble $\{(j,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ j\leqslant p\}$ et un paramètre $m\in]0,1[$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} D_t^p u(t,x)=\sum_{(j,q)\in B} a_{j,q}(t,x)D_t^j D_x^q u(t,mx), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\\ D_t^k u(0,x)=v_k(x), \quad x\in\mathbb{R},\ k=0,\dots,p-1, \end{cases} \tag{5}$$

avec les

$$a_{j,q}(t,x)=\sum_{\beta<q} a_{j,q}^{\beta}(t)x^{\beta}$$

des polynômes en x, de degrés inférieurs strictement à q, à cœfficients dans $\mathcal{A}^1(\mathbb{R})$ en t, et les v_k des données.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1. *Pour tout entier $d\geqslant 1$ et pour toutes fonctions $v_0,\dots,v_{p-1}\in\mathcal{E}^{(d)}(\mathbb{R})$, le problème* (5) *admet une unique solution u dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.*

Remarques.

1. Le théorème reste vrai si on rajoute dans (5) un terme constant par rapport à l'inconnue u.
2. On peut considérer le cas où $B\subset\{(j,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ j\leqslant p\}$ avec $|a_{j,0}|<1$.
3. On remarquera que dans le cas des équations kowalevskiennes, l'indice de Gevrey d est déterminé par la structure même de l'opérateur (cf. [12,24,31]), par contre dans notre travail, le facteur absorbant m nous permet de résoudre notre problème dans toutes les classes de Gevrey d'indice $d\geqslant 1$.
4. Contrairement à notre résultat, ceux de [5,16,18] sont des résultats locaux.

3. Preuve du résultat

3.1. Transformation du problème

Nous commençons par transformer notre problème différentiel en un problème de point fixe.

A l'aide du changement d'inconnue suivant :

$$v(t,x)=u(t,x)-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}v_k(x)$$

le problème (5) devient équivalent à

$$\begin{cases} D_t^p v(t,x)=\sum_{(j,q)\in B} a_{j,q}(t,x)D_t^j D_x^q v(t,mx)\\ \qquad\qquad +\sum_{(j,q)\in B}\sum_{k=j}^{p-1} a_{j,q}(t,x)\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}D_x^q v_k(mx),\\ D_t^j v(0,x)=0, \quad j=0,\dots,p-1. \end{cases}$$

En posant

$$U=D_t^p v(t,x),$$

sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j = 0, \ldots, p-1$, $D_t^j v(0,x) = 0$, on déduit que le dernier problème est équivalent à l'équation suivante :

$$U(t,x) = \sum_{(j,q)\in B} a_{j,q}(t,x) D_t^{j-p} D_x^q U(t,mx) + \sum_{(j,q)\in B} \sum_{k=j}^{p-1} a_{j,q}(t,x) \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} D_x^q v_k(mx)$$

où $D_t^{-1} w$ désigne la primitive de w qui s'annule avec t, ce qui nous amène à la recherche des points fixes de l'application $\mathcal{L}: U \mapsto \mathcal{L}U$ telle que

$$\mathcal{L}U(t,x) = \sum_{(j,q)\in B} a_{j,q}(t,x) D_t^{j-p} D_x^q U(t,mx) + F(t,x) \tag{6}$$

avec

$$F(t,x) = \sum_{(j,q)\in B} \sum_{k=j}^{p-1} a_{j,q}(t,x) \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} D_x^q v_k(mx).$$

Afin d'établir l'existence et l'unicité du point fixe de cette application, nous définissons, dans la section qui suit, certaines algèbres de Banach, qui « recouvrent » l'espace des fonctions analytiques-Gevrey, où on montre que l'application $\mathcal{L}$ est strictement contractante et utiliser le théorème du point fixe de Banach.

3.2. Les algèbres $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$

Soit $\theta(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{(n+1)^2}$ et K la fonction et la constante de Lax [22]. Pour $R > 0$, on note

$$\varphi_R(t) = K^{-1} \theta\left(\frac{t}{R}\right) \tag{7}$$

qui est définie pour $|t| \leqslant R/\varepsilon$, donc en particulier pour $|t| \leqslant R$. Pour un intervalle ouvert borné $\mathcal{J}$, on notera

$$\mathcal{J}_R = \mathcal{I}_R \times \mathcal{J} =]-R, R[\times \mathcal{J}.$$

Pour $d \geqslant 1$, $\varepsilon \in]0,1[$ et $\zeta > 0$, on considère la série formelle en x

$$\Phi^d_{R,\varepsilon}(t,x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\zeta \cdot x)^k}{k!} k!^{d-1} D^k \varphi_R\big(\varepsilon|t|\big).$$

Soit $\mathbf{G}^{0,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ l'ensemble des fonctions continues par rapport à t et infiniment différentiables par rapport à x dans $\mathcal{J}_R$ telles que

$$\exists C > 0;\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I}_R, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \big|D_x^k u(t,x)\big| \leqslant C \zeta^k k!^{d-1} D^k \varphi_R\big(\varepsilon|t|\big). \tag{8}$$

Cette relation est notée $u \ll C\Phi^d_{R,\varepsilon}(t,x)$, la borne inférieure de ces constantes est notée $\|u\|_d$ et l'application

$$\|u\|_d : u \in \mathbf{G}^{0,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R) \mapsto \|u\|_d$$

est une norme sur $\mathbf{G}^{0,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, qui lui confère une structure d'algèbre de Banach (cf. [10,31]).

On considère $\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathcal{J}_R)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n_t u \in G^{0,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R) \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|D^n_t u\|_d}{n!^\sigma} < +\infty.$$

Conséquence : Si $u \in \mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, alors :

$$\begin{aligned}
&\exists C \geqslant 0;\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I}_R,\\
&\sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D^k_x D^n_t u(t,x)\right| \leqslant C n!^\sigma \zeta^k k!^{d-1} D^k \varphi_R\big(\varepsilon|t|\big).
\end{aligned}$$

Proposition 1. *L'application* :

$$\begin{aligned}
&|||\cdot|||_{\sigma,d} : \mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R) \to \mathbb{R}_+,\\
&u \mapsto |||u|||_{\sigma,d} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|D^n_t u\|_d}{n!^\sigma},
\end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ qui lui confère une structure d'algèbre de Banach.

Démonstration. Il est évident que $|||\cdot|||_{\sigma,d}$ est une norme sur $\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et en utilisant l'expression du terme générale du produit de deux séries et que le fait que $\|\cdot\|_d$ est une norme d'algèbre, on montre que $|||\cdot|||_{\sigma,d}$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\xi}(\mathcal{J}_R)$.

Pour terminer, on montre que

Lemme 1. $(\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\xi}(\mathcal{J}_R), |||\cdot|||_{\sigma,d})$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}^{\sigma,d}_{R,\xi}(\mathcal{J}_R)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D^n_t u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $G^{0,d}_R(\mathcal{J}_R)$ qui est complet, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u^n \in G^{0,d}_R(\mathcal{J}_R)$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} D^n_t u_k = u^n \quad \text{dans } G^{0,d}_R(\mathcal{J}_R). \qquad \square$$

1. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n_t u^0 = u^n$.

D'après la prop. 6.6 de [31], pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^{-n}_t : G^{0,d}_R(\mathcal{J}_R) \to G^{0,d}_R(\mathcal{J}_R)$ est un opérateur continue, donc : $\lim_{k\to+\infty} D^{-n}_t(D^n_t u_k) = D^{-n}_t(u^n)$.

D'autre part,

$$\lim_{k\to\infty} D^{-n}_t(D^n_t u_k) = \lim_{k\to\infty}\left(u_k - \sum_{\mu<n} \frac{t^\mu}{\mu!} D^\mu_t u_k(0,x)\right) = u^0 - \sum_{\mu<n} \frac{t^\mu}{\mu!} u^\mu(0,x),$$

par suite,

$$u^0 = \lim_{k\to\infty} D^{-n}_t(D^n_t u_k) + \sum_{\mu<n} \frac{t^\mu}{\mu!} u^\mu(0,x) = D^{-n}_t u^n + \sum_{\mu<n} \frac{t^\mu}{\mu!} D^\mu_t u_k(0,x)$$

ce qui prouve que

$$D_t^n u^0 = u^n + D_t^n\left(\sum_{\mu<n}\frac{t^\mu}{\mu!}D_t^\mu u_k(0,x)\right) = u^n \in G_R^{0,d}(\mathcal{J}_R).$$

2. Montrons que $\lim_{k\to\infty} u_k = u^0$ dans $\mathcal{G}_{R,\varepsilon}^{\sigma,d}(\mathcal{J}_R)$.

Soit $\eta > 0$, comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{G}_{R,\xi}^{\sigma,d}(\mathcal{J}_R)$, alors il existe $N_\eta \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k,\ k' \geqslant N_\eta,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|D_t^n u_k - D_t^n u_{k'}\right\|_d \leqslant \eta.$$

Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty}[D_t^n u_k - D_t^n u^0] = 0$ dans $G_R^{0,d}(\mathcal{J}_R)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N_{\eta,n} > N_\eta; \quad \left\|D_t^n u_{N_{\eta,n}} - D_t^n u^0\right\|_d \leqslant \eta.$$

Ansi, pour $k > N_\eta$, on obtient formellement :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|D_t^n u_k - D_t^n u^0\|_d}{n!^\sigma} &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|D_t^n u_k - D_t^n u_{N_{n,\eta}} + D_t^n u_{N_{n,\eta}} - D_t^n u^0\|_d}{n!^\sigma}\\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{\|D_t^n u_k - D_t^n u_{N_{n,\eta}}\|_d}{n!^\sigma} + \frac{\|D_t^n u_{N_{n,\eta}} - D_t^n u^0\|_d}{n!^\sigma}\right]\\ &\leqslant 2\eta\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!^\sigma} \leqslant 2e\eta,\end{aligned}$$

d'où on déduit que $(u_k - u_0) \in \mathcal{G}_{R,\varepsilon}^{\sigma,d}(\mathcal{J}_R)$, donc $u_0 \in \mathcal{G}_{R,\varepsilon}^{\sigma,d}(\mathcal{J}_R)$ et

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = u^0$$

dans $\mathcal{G}_{R,\varepsilon}^{\sigma,d}(\mathcal{J}_R)$, ce qui termine la preuve de la proposition 1. □

Remarque 1. D'après ce qui précède, pour $\sigma = 1$, si $u \in \mathcal{G}_{R,\varepsilon}^{1,d}(\mathcal{J}_R)$ on a :

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_t^n D_x^k u(t,x)\right| \leqslant C n!\zeta^k k!^{d-1} D^k\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big). \tag{9}$$

Comme φ_R est une fonction analytique sur $]-R, R[$ et bornée sur $[-R, R]$, les inégalités de Cauchy nous donnent :

$$\exists C' > 0,\ \forall k \in N,\ \forall t \in \mathcal{I}_R, \quad D^k\varphi_R\big(\varepsilon\cdot|t|\big) \leqslant C'^{k+1}k!$$

et en reportant cette majoration dans (9), on déduit que u est analytiques par rapport à t et de classe Gevrey d'indice d par rapport à x, ce qui nous amène à noter cet espace par $\mathcal{A}_{R,\varepsilon}^{1,d}(\mathcal{J}_R)$ avec la norme

$$|||u|||_{1,d} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|D_t^n u\|_d}{n!}.$$

3.3. *Quelques relations entre les espaces utilisés*

Comme dans [12], on considère la famille d'algèbres de Banach $\mathcal{A}_{\rho R,\varepsilon}^{1,d}(\mathcal{J}_R)$ dépendant du paramètre $\rho \geqslant 1$.

Lemme 2. *Pour tout* $R>0$, $\varepsilon\in]0,1[$, $\rho\geqslant 1$ *et* $\zeta>0$, *on a*

$$\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)\subset \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R).$$

Démonstration. Soit $u\in\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$, d'aprés (4) on a,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists C_{n,h}>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathcal{I}_R,\quad \sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_t^nD_x^ku(t,x)\right|\leqslant (C_{n,h})h^kn!k!^d$$

avec

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}C_{n,h}<+\infty,$$

comme

$$D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big)\geqslant\frac{1}{K}\frac{k!}{(\rho R)^k(1+k)^2}$$

on déduit que

$$k!\leqslant K(\rho R)^k(1+k)^2D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big)\tag{10}$$

par suite :

$$\sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_t^nD_x^ku(t,x)\right|\leqslant K(C_{n,h})h^kn!k!^{d-1}(\rho R)^k(1+k)^2D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big)$$

comme $(1+k)^2\leqslant(e^2)^k$, alors pour $\zeta>0$ donné, on choisit h assez petit pour que ($he^2\rho R<\zeta$), ce qui nous permet d'écrire

$$\forall h,\ \exists C>0,\ \forall n,k\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathcal{I}_R,\quad \sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_t^nD_x^ku(t,x)\right|\leqslant KC_{n,h}n!\zeta^kk!^{d-1}D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big)\tag{11}$$

donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad D_t^nu\in G^{0,d}_{R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)\quad\text{et}\quad \|D_t^nu\|_d\leqslant KC_{n,h}n!,$$

d'où on déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|D_t^nu\|_d}{n!}\leqslant K\sum_{n\in\mathbb{N}}C_{n,h}<+\infty$$

et que $u\in\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$. □

Lemme 3. *Pour tous* $\zeta\in\mathbb{N}^*$, $\beta\in\mathbb{N}$ *et* $\mathcal{J}$ *borné, il existe une constante* $C=C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}$, *telle que pour tout* $\rho\geqslant 1/R$, *la fonction* $x\mapsto x^\beta$ *est dans* $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ *de norme inférieure ou égale à* $C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}(\rho R)^\beta$.

Démonstration. $\mathcal{J}$ étant borné, il existe $C_{\beta,\mathcal{J}}>0$, telle que pour tout $k\leqslant\beta$,

$$\sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_x^k(x^\beta)\right|\leqslant C_{\beta,\mathcal{J}}k!.$$

Tenant compte de (10), sachant que $(1+k)^2\leqslant e^{2k}$, alors pour $\rho\geqslant 1/R$ et $k\leqslant\beta$ on obtient

$$\sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_x^k(x^\beta)\right|\leqslant C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}(\rho R)^\beta\zeta^kk!^{d-1}D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big)\tag{12}$$

avec

$$C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}} = \max_{k\leqslant\beta}\{C_{\beta,\mathcal{J}} K e^{2k}/\zeta^k\}.$$

Sachant que $D_t^n D_x^k(x^\beta) = 0$ pour tout $k > \beta$ ou $n \geqslant 1$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D_t^n D_x^k(x^\beta)\right| \leqslant C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}(\rho R)^\beta n!\zeta^k k!^{d-1} D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big), \tag{13}$$

ce qui montre que $x^\beta \in \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et que $|||x^\beta|||_{1,d} \leqslant C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}(\rho R)^\beta$. □

Corollaire 1. *Etant donné un polynôme P de degrés β, alors pour tous $\zeta \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{J}$ borné, il existe une constante $C = C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}$, telle que pour tout $\rho \geqslant 1/R$, P est dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ de norme inférieure ou égale à $C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}(\rho R)^\beta$.*

Remarque 2. D'après les calculs précédents, on remarque que si $\zeta \geqslant 1$ alors $C_{\beta,\zeta,\mathcal{J}}$ est indépendante de ζ.

3.4. Propriété de continuité de certains opérateurs

Afin de s'assurer que l'action d'absorbtion soit interne dans $\mathcal{J}$, on supposera dans toute la suite que $\mathcal{J}$ est une intervalle ouvert borné et centré en $x = 0$. Donnons dans ce qui suit un ensemble de résultats techniques sous formes de lemmes.

Lemme 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]-1, 1[$, on a :*

$$\left|D^n\theta(t)\right| \leqslant \frac{n!}{(1-|t|)^{n+1}}.$$

Démonstration. Comme

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad \text{avec } |a_k| = \frac{1}{(1+k)^2} < 1,$$

alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $|t| < 1$, on a :

$$\left|D^n\theta(t)\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n} \frac{k!}{(k-n)!}|t|^{k-n} = D_y^n\left(\frac{1}{1-y}\right)_{y=|t|} = \frac{n!}{(1-|t|)^{n+1}}. \qquad \square$$

Lemme 5. *La fonction φ_R, définie dans* (7)*, vérifie la propriété*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-R, R],\quad \left|D^n\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big)\right| \leqslant \frac{1}{K}\frac{n!}{R^n}\frac{1}{(1-\varepsilon)^{n+1}}. \tag{14}$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n\varphi_R(t) = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{R}\right)^n D^n\theta\left(\frac{t}{R}\right),$$

donc pour $\varepsilon < 1$ et $|t| \leqslant R$, par le lemme 4 on obtient

$$\left|D^n\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big)\right| \leqslant \frac{1}{K}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(1-\varepsilon\frac{|t|}{R})^{n+1}}. \tag{15}$$

Comme la fonction $x \mapsto 1/(1-\varepsilon x)^{n+1}$ est croissante pour $0 < \varepsilon < 1$ et $x \in]0,1[$, on déduit que

$$\frac{1}{(1-\varepsilon\frac{|t|}{R})^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n+1}}$$

et en reportant cette majoration dans (15) on obtient (14). □

Lemme 6. *Pour tout $r \in [0,1[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = r^n(1+n)^2$, est bornée.*

Lemme 7. *Pour tout réel $m \in]0,1[$, il existe des réels $s, \varepsilon \in]0,1[$ tels que*

$$r = m\frac{1+s}{1-\varepsilon} < 1.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < 1-m$ et

$$s < \min\left\{1, \frac{1-\varepsilon}{m} - 1\right\}.$$

Dans toute la suite, on fixe R et ζ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2. *Pour tout réel $m \in]0,1[$, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que* : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\exists C_{(m,\varepsilon,q)} > 0$;

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall |t| \leqslant R,\ m^{(n+q)}\left|D^{n+q}\varphi_R\left(\varepsilon|t|\right)\right| \leqslant C_{(m,\varepsilon,q)} R^{-q} D^n \varphi_R\left(\varepsilon|t|\right). \tag{16}$$

Démonstration. Soient $q, n \in \mathbb{N}$ et $|t| \leqslant R$, d'aprés (14), on a :

$$\left|D^{n+q}\varphi_R\left(\varepsilon|t|\right)\right| \leqslant \frac{(n+q)!}{K(1-\varepsilon)} \frac{1}{[R(1-\varepsilon)]^{(n+q)}}.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton dans $(1+s)^{n+q}$, on trouve

$$(n+q)! \leqslant s^{-q} q!(1+s)^{(n+q)} n! \tag{17}$$

ce qui donne

$$\left|D^{n+q}\varphi_R\left(\varepsilon|t|\right)\right| \leqslant \frac{s^{-q}q!}{K(1-\varepsilon)} \left[\frac{1+s}{R(1-\varepsilon)}\right]^{(n+q)} n! \tag{18}$$

et en utilisant (10), avec $\rho = 1$, pour majorer $n!$, on trouve

$$\left|D^{n+q}\varphi_R\left(\varepsilon|t|\right)\right| \leqslant \frac{s^{-q}q!}{(1-\varepsilon)} R^{-q} \left[\frac{1+s}{1-\varepsilon}\right]^{(n+q)} (n+1)^2 D^n \varphi_R\left(\varepsilon|t|\right). \tag{19}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité (19) par $m^{(n+q)}$, en appliquant le lemme 6 à la suite $r^n(1+n)^2$, avec

$$r = m\frac{1+s}{1-\varepsilon}$$

considéré dans le lemme 7, on déduit

$$\begin{aligned} m^{n+q}\left|D^{n+q}\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big)\right| &\leqslant \frac{s^{-q}q!}{(1-\varepsilon)}R^{-q}\left[m\frac{1+s}{1-\varepsilon}\right]^q\left[m\frac{1+s}{1-\varepsilon}\right]^n(n+1)^2D^n\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big) \\ &\leqslant \frac{s^{-q}q!}{(1-\varepsilon)}\left[m\frac{1+s}{1-\varepsilon}\right]^q R^{-q}C_{(m,s,\varepsilon)}D^n\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big) \\ &\leqslant C_{(m,\varepsilon,q)}R^{-q}D^n\varphi_R\big(\varepsilon|t|\big) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition.[1] □

Proposition 3. *Pour tout $m \in]0,1[$, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C = C_{(m,\varepsilon,q)}$ telle que*

$$\forall u \in \mathbf{G}^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R), \quad \left\|\big(D_x^q u(t,mx)\big)\right\|_d \leqslant C_{(m,\varepsilon,q)}\zeta^q(\rho R)^{-q}\|u\|_d. \tag{20}$$

Démonstration. Soient m, $\varepsilon \in]0,1[$ et $u \in \mathbf{G}^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, alors en utilisant successivement (8), (19) et (17) on obtient : Pour tous $k, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_x^k\big[D_x^q u(t,mx)\big]\right| &\leqslant m^{-q}\|u\|_d\zeta^q\frac{(s^{-q}q!)^d}{(1-\varepsilon)}(\rho R)^{-q} \\ &\quad\times\left(\left[m\frac{(1+s)^d}{1-\varepsilon}\right]^{(k+q)}(k+1)^2\right)k!^{d-1}\,\zeta^k D^k\varphi_{\rho R}\big(\varepsilon|t|\big). \end{aligned}$$

Sachant que la limite de

$$\frac{(1+s)^d}{1-\varepsilon}$$

est égale à 1 quand s et ε tendent vers 0 et que $m \in]0,1[$, en utilisant le lemme 6 pour

$$r = \frac{m(1+s)^d}{1-\varepsilon},$$

avec s et ε suffisament petits, on obtient

$$\left\|D_x^q\big[u(t,mx)\big]\right\|_d \leqslant m^{-q}\|u\|_d\zeta^q\frac{(s^{-q}q!)^d}{(1-\varepsilon)}(\rho R)^{-q}\left[m\frac{(1+s)^d}{1-\varepsilon}\right]^q C_{(m,\varepsilon,s)}$$

et pour terminer la preuve de la proposition on prend,

$$C_{(m,\varepsilon,q)} = m^{-q}\frac{(s^{-q}q!)^d}{(1-\varepsilon)}\left[m\frac{(1+s)^d}{1-\varepsilon}\right]^q C_{(m,\varepsilon,s)}. \qquad \square$$

Proposition 4. *Soit $u \in \mathbf{G}^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, alors pour tout $j \in (-\mathbb{N})$, $D_t^j u \in \mathbf{G}^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et on a*

$$\left\|D_t^j u(t,x)\right\|_d \leqslant \|u\|_d R^{-j}.$$

Démonstration. Pour $j = 0$ c'est trivial.

[1] On n'a pas fait ressortir la dépendance de la constante du paramètre s, car ce dernier est lui même choisi en fonction de m et ε.

Pour $j<0$; soit $u \in \mathbf{G}^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, comme pour tout $j \in (-\mathbb{N})^*$, $D_t^j u(t,x)$ est l'intégrale ittérée $-j$ fois de u sur $(0,t)$, alors en utilisant (8) et l'expression de $D^k\varphi_{\rho R}(\varepsilon|t|)$, on obtient :

$$\left|D_x^k D_t^j u(t,x)\right| \leqslant \|u\|_d \zeta^k k!^{d-1} \frac{1}{K}\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho R}\right)^i \frac{1}{(1+i)^2}\frac{i!}{(i-k)!}\varepsilon^{i-k} D_t^j\left(|t|^{i-k}\right).$$

Comme pour tout $j \in -\mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathcal{I}_R$, $|D^j(|t|^{i-k})| \leqslant |t|^{i-k}R^{-j}$, en reportant ceci dans les majorations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathcal{J}}\left|D_x^k\left[(D_t^j u)(t,x)\right]\right| &\leqslant R^{-j}\|u\|_d \zeta^k k!^{d-1}\frac{1}{K}\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho R}\right)^i\frac{1}{(1+i)^2}\frac{i!}{(i-k)!}\left(\varepsilon|t|\right)^{i-k}\\ &= R^{-j}\|u\|_d \zeta^k k!^{d-1} D^k\varphi_{\rho R}\left(\varepsilon|t|\right),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Proposition 5. *Pour tout $m \in]0,1[$ il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que pour tout $(j,q) \in (-\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}^*)$, il existe une constante $C = C_{(m,\varepsilon,j,q)} > 0$, telles que* :

$$\forall u \in \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R), \quad \left\|D_t^j D_x^q u(t,mx)\right\|_d \leqslant C_{(m,\varepsilon,j,q)}\rho^{-q}\|u\|_d. \tag{21}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des propositions 3 et 4. □

Proposition 6. *Pour tout $m \in]0,1[$, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que pour tout $(j,q) \in (-\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}^*)$ il existe une constante positive $C = C_{(m,\varepsilon,q,j)}$, telle que pour toutes fonctions $u,\ u' \in \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, on a* :

$$\left|\left|\left|D_t^j D_x^q u(t,mx)\right|\right|\right|_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}|||u|||_{1,d}, \tag{22}$$

$$\left|\left|\left|D_t^j D_x^q u(t,mx) - D_t^j D_x^q u'(t,mx)\right|\right|\right|_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}|||u-u'|||_{1,d}. \tag{23}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{A}^{(1,d)}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_t^n u \in G^{0,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$. Comme $D_t^n D_t^j = D^{n+j}$, d'aprés (21) pour tout $(j,q) \in (-\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}^*)$,

$$\begin{aligned}\left\|D_t^n\left[D_t^j D_x^q u(t,mx)\right]\right\|_d &= \left\|D_x^q[D_t^{n+j}u](t,mx)\right\|_d\\ &\leqslant C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}\|D_t^{n+j}u\|_d,\end{aligned}$$

par suite on trouve

$$\begin{aligned}&\left|\left|\left|D_t^j D_x^q u(t,mx)\right|\right|\right|_{1,d}\\ &\quad= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|D_t^n[D_t^j D_x^q u(t,mx)]\|_d}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|[D_x^q D_t^{n+j}u(t,mx)]\|_d}{n!}\\ &\quad\leqslant \sum_{n\in\{0,\dots,-j-1\}}\frac{C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}\|D_t^{n+j}u\|_d}{n!} + \sum_{n\geqslant -j}\frac{C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}\|D_t^{n+j}u\|_d}{n!}\\ &\quad\leqslant C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}\left(\sum_{n\in\{0,\dots,-j-1\}}\frac{\|u\|_d R^{-n-j}}{n!} + \sum_{n\geqslant -j}\frac{\|D_t^{n+j}u\|_d}{(n+j)!}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}\left(\sum_{n\in\{0,\dots,-j-1\}}\frac{\|u\|_d R^{-n-j}}{n!}+\sum_{k\geqslant 0}\frac{\|D_t^k u\|_d}{k!}\right).$$

Pour terminer, on pose

$$C_{(m,\varepsilon,q,j)} := C_{(m,\varepsilon,q,j)}\left(\sum_{n\in\{0,\dots,-j-1\}}\frac{R^{-n-j}}{n!}+1\right).$$

Pour la deuxième majoration de cette proposition, on utilise la linéarité des opérateurs $D_t^j D_x^q$. □

3.5. *Recherche du point fixe de $\mathcal{L}$*

3.5.1. *Recherche du point fixe de $\mathcal{L}$ dans les algèbres $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$*

Comme on l'a déjà expliqué, pour $R > 0$ et $\mathcal{J}$ fixés, nous commencerons par montrer l'existence d'un unique point fixe de $\mathcal{L}$ dans certaines algèbres de Banach $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.

Proposition 7. *Etant données des fonctions v_j, $j = 0,\dots,p-1$, dans $\mathcal{E}^{(d)}(\mathcal{J})$, alors pour tout $m \in]0,1[$ il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que* : $\forall\zeta > 0$, $\exists\rho_0 > 0$; $\forall\rho \geqslant \rho_0$,

$$\exists a_\rho > 0,\quad \mathcal{L}\big(\mathcal{B}(0,a_\rho)\big)\subset\mathcal{B}(0,a_\rho), \tag{24}$$

$$\exists C\in]0,1[,\ \forall u,v\in\mathcal{B}(0,a_\rho),\quad |||\mathcal{L}u-\mathcal{L}v|||_{1,d}\leqslant C|||u-v|||_{1,d}, \tag{25}$$

où $\mathcal{B}(0,a_\rho)$ est la boule de centre 0 *et de rayon a_ρ de $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.*

Démonstration. Soit u une fonction de $\mathcal{B}(0,a_\rho)$ dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$. Sachant que $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ est une algèbre de Banach, alors

$$\begin{aligned}|||\mathcal{L}u|||_{1,d} &= \Big|\Big|\Big|\sum_{(j,q)\in B} a_{j,q}(t,x)D_t^{j-p}D_x^q u(t,mx)+F(t,x)\Big|\Big|\Big|_{1,d}\\ &\leqslant \sum_{(j,q)\in B}\big|\big|\big|a_{j,q}(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}\big|\big|\big|D_t^{j-p}D_x^q u(t,mx)\big|\big|\big|_{1,d}+\big|\big|\big|F(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}.\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 22, on trouve

$$|||\mathcal{L}u|||_{1,d}\leqslant\sum_{(j,q)\in B}\big|\big|\big|a_{j,q}(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-q}|||u|||_{1,d}+\big|\big|\big|F(t,x)\big|\big|\big|_{1,d},$$

les $a_{j,q}(t,.)$ étant des polynômes de degrés $\leqslant q-1$ alors, d'aprés le corollaire 1, il existe une constante C_q, telle que

$$\big|\big|\big|a_{j,q}(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}\leqslant C_q(\rho R)^{q-1}$$

donc

$$|||\mathcal{L}u|||_{1,d}\leqslant\sum_{(j,q)\in B}C_q(R)^{q-1}C_{(m,\varepsilon,q,j)}\rho^{-1}|||u|||_{1,d}+\big|\big|\big|F(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}.$$

B étant un ensemble fini, on note

$$C_{(m,\varepsilon)}=\sum_{(j,q)\in B}C_q(R)^{q-1}C_{(m,\varepsilon,q,j)}$$

d'où on déduit

$$|||\mathcal{L}u|||_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}|||u|||_{1,d} + \big|\big|\big|F(t,x)\big|\big|\big|_{1,d}.$$

Comme

$$F(t,x) = \sum_{(j,q)\in B}\sum_{k=j}^{p-1} a_{j,q}(t,x)\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}D_x^q v_k(x)$$

où les v_k sont dans $\mathcal{E}^{(d)}(\mathcal{J})$ et les $a_{j,q}(t,x)$ des polynômes en x dont les coefficients sont dans $\mathcal{A}^1(\mathcal{I})$ en t, du lemme 2 on déduit que pour tout $\rho > 0$, $F \in \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et il existe $C_{(F,m,\varepsilon,\rho)} > 0$ telle que $|||F(t,x)|||_{1,d} \leqslant C_{(F,m,\varepsilon,\rho)}$, donc

$$|||\mathcal{L}u|||_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}|||u|||_{1,d} + C_{(F,m,\varepsilon,\rho)}$$

par suite, pour $u \in \mathcal{B}(0,a_\rho)$, on a :

$$|||\mathcal{L}u|||_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}a_\rho + C_{(F,m,\varepsilon,\rho)}$$

et pour que $\mathcal{L}u \in \mathcal{B}(0,a_\rho)$, il suffit que

$$C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}a_\rho + C_{(F,m,\varepsilon,\rho)} \leqslant a_\rho$$

or pour ρ suffisamment grand, pour que $1 - C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1} > 0$ il suffit de choisir

$$a_\rho \geqslant \frac{C_{(F,m,\varepsilon,\rho)}}{1 - C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}}$$

pour que

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(0,a_\rho)\big) \subset \mathcal{B}(0,a_\rho)$$

ce qui termine la preuve de la première partie de la proposition.

Montrons la deuxième partie.

Soient $u, v \in \mathcal{B}(0,a) \subset \mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, $\mathcal{L}$ étant affine, alors on déduit que

$$|||\mathcal{L}u - \mathcal{L}v|||_{1,d} \leqslant C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1}|||u-v|||_{1,d}$$

ceci termine la preuve de notre proposition, car on a déjà choisi ρ telle que

$$C = C_{(m,\varepsilon)}\rho^{-1} < 1. \qquad \square$$

Ainsi, pour m fixé dans $]0,1[$, en utilisant le théorème du point fixe de Banach on déduit la proposition suivante

Proposition 8. *Il existe $\varepsilon \in]0,1[$ pour lequel ; pour tout $\zeta > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $\rho > \rho_0$ l'application $\mathcal{L}$ admet un unique point fixe dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.*

3.5.2. Construction du point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

Dans ce qui suit on va montrer l'existence d'un point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$.

Etant donnés ε et ζ choisis dans la proposition 8 et le ρ_0 qui leur est associé, alors : Pour tout $\eta > 1$, l'application $\mathcal{L}$ admet un unique point fixe u dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.

On a la proposition suivante qui nous donne une relation entre les algèbres $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.

Proposition 9. *Soient $\eta \leqslant \mu$ dans $[1, +\infty[$, alors $\mathcal{A}^{1,d}_{\mu\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ s'injecte contuniment dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{A}^{1,d}_{\mu\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D_x^k D_t^n u(t,x)\right| \leqslant \|D_t^n u\|_d \zeta^k k!^{d-1} D^k \varphi_{\mu\rho_0 R}\big(\varepsilon|t|\big).$$

Vu que $\mu \geqslant \eta$, alors

$$\begin{aligned}
D^k \varphi_{\mu\rho_0 R}\big(\varepsilon|t|\big) &= \left(\frac{1}{\mu\rho_0 R}\right)^k \frac{1}{K} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(1+j)^2} \frac{j!}{(j-k)!} \left(\frac{\varepsilon|t|}{\mu\rho_0 R}\right)^{j-k} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\eta\rho_0 R}\right)^k \frac{1}{K} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(1+j)^2} \frac{j!}{(j-k)!} \left(\frac{\varepsilon|t|}{\eta\rho_0 R}\right)^{j-k} \\
&= D^k \varphi_{\eta\rho_0 R}\big(\varepsilon|t|\big),
\end{aligned}$$

en reportant cette majoration dans la précèdente on déduit que $u \in \mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la norme de $D_t^n u$ dans $\mathbf{G}^{0,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ est inférieur ou égale à la norme de $D_t^n u$ dans $\mathbf{G}^{0,d}_{\mu\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et en utilisant la définition de la norme de u dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, on trouve qu'elle est inférieur ou égale à la norme de u dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\mu\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Proposition 10. *L'application $\mathcal{L}$ admet un unique point fixe $u_1 \in \mathcal{A}^{1,d}_{\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$. De plus, u_1 vérifie la propriété suivante*

$$u_1 \in \bigcap_{\eta\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R).$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de points fixes de $\mathcal{L}$ dans chaque $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ étant assurées pour tout $\eta \geqslant 1$, sachant que les $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ s'injectent contuiment dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, alors si u_η est le point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, de l'unicité du point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ on déduit que $u_1 = u_\eta$, donc

$$u_1 \in \bigcap_{\eta\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R). \qquad \square$$

Proposition 11. *La fonction u_1 donnée dans la proposition* 10*, est le seul point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$.*

Démonstration. On va commencer par montrer que $u_1 \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$.

Soit $h > 0$, comme $u_1 \in \bigcap_{\eta\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}^{1,d}_{\eta\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, alors pour tout $\eta \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\quad \sup_{x\in\mathcal{J}} \left|D_t^n D_x^k u_1(t,x)\right| &\leqslant \|D_t^n u\|_d \zeta^k k!^{d-1} D^k \varphi_{\eta\rho_0 R}\big(\varepsilon|t|\big) \\
\text{(d'aprés (14))} &\leqslant \|D_t^n u\|_d \zeta^k k!^{d-1} \frac{1}{K} \frac{k!}{(\eta\rho_0 R)^k} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$= \|D_t^n u\|_d \frac{1}{K(1-\varepsilon)} \left(\frac{\zeta}{\eta\rho_0 R(1-\varepsilon)}\right)^k k!^d$$

donc pour η assez grand pour que

$$\frac{\zeta}{\eta\rho_0 R(1-\varepsilon)} \leqslant h \quad \text{et} \quad C'_n = \frac{\|D_t^n u\|_d}{n!} \frac{1}{K(1-\varepsilon)},$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in \mathcal{J}} \left|D_t^n D_x^k u_1(t,x)\right| \leqslant C'_n n! h^k k!^d,$$

et

$$\sum_n C'_n = \sum_n \frac{\|D_t^n u\|_d}{n!} \frac{1}{K(1-\varepsilon)} = \frac{1}{K(1-\varepsilon)} \sum_n \frac{\|D_t^n u\|_d}{n!} < +\infty,$$

ce qui montre que $u_1 \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$.

Montrons que u_1 est le seul point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$.
Soit $u_2 \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$ un point fixe de $\mathcal{L}$, alors du lemme 2 on déduit que u_2 est un point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$ et de l'unicité du point fixe de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}^{1,d}_{\rho_0 R,\varepsilon}(\mathcal{J}_R)$, on déduit que $u_2 = u_1$, ce qui termine la preuve de la proposition. □

En revenant aux étapes de la transformation de notre problème, on déduit que pour tout $R > 0$, il existe une unique solution u_R du problème (5) dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$. Par recollement des u_R, avec $R > 0$, on construit une fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall R > 0$, $u_{|\mathcal{I}_R} = u_R \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$,
2) u est la seule solution du problème (5) dans $\mathcal{A}^{(1,d)}(\mathcal{J}_R)$ ce qui montre que $u \in \mathcal{A}^{(1,d)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et qu'elle est la seule solution du problème (5) dans cet espace, ce qui termine la preuve du théorème 1. □

Remerciements

Les auteurs remercient le professeur D. Gourdin, de l'université de Paris VI, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Références

[1] A. Augustynowicz, M. Kwapisz, On differentiability with respect to parameters of solutions and shooting method for boundary value problems for neutral differential delay equations, Funkcial. Ekvac. 31 (2) (1988) 297–314.
[2] A. Augustynowicz, H. Leszczyński, On the existence of analytic solutions of the Cauchy problem for first-order partial differential equations with retarded variables, Comment. Math. Prace Mat. 36 (1996) 11–25.
[3] A. Augustynowicz, Existence and uniqueness of solutions for partial differential-functional equations of the first order with deviating argument of the derivative of unknown function, Serdica Math. J. 23 (3–4) (1997) 203–210.
[4] A. Augustynowicz, H. Leszczyński, W. Walter, Cauchy–Kovalevskaya theory for equations with deviating variables, Aequationes Math. 58 (1–2) (1999) 143–156.
[5] A. Augustynowicz, H. Leszczyński, Cauchy–Kovalevskaya theorems for a class of differential equations with delays at the derivatives, Aequationes Math. 59 (2000) 235–247.
[6] A. Augustynowicz, H. Leszczyński, W. Walter, On some nonlinear ordinary differential equations with advanced arguments, Nonlinear Anal. 53 (3–4) (2003) 495–505.

[7] A. Cauchy, Mémoire sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, et sur les développements de ces intégrales en séries ordonnées, suivant les puissances ascendantes d'un paramètre que renferment les équations proposées, C. R. Acad. Sci. Paris 18 juillet (1842) 101, voir Oeuvres complètes de A. Cauchy, extrait N 172, pp. 50–51.
[8] F. Colombini, S. Spagnolo, Hyperbolic equations with coefficients rapidly oscillating in time: A result of nonstability, J. Differential Equations 52 (1984) 24–38.
[9] E. De Giorgi, Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare e derivate parziali di tipo parabolico, Rend. Mat. Appl. 14 (1955) 382–387.
[10] D. Gourdin, M. Mechab, Problème de Goursat non linéaire dans les classes de Gevrey, pour des équations de Kirchhoff généralisées, J. Math. Pures Appl. 75 (1996) 569–593.
[11] D. Gourdin, M. Mechab, Problème de Cauchy pour des équations de Kirchhoff généralisées, Comm. Partial Differential Equations 23 (5–6) (1998) 761–776.
[12] D. Gourdin, M. Mechab, Solution globale d'un problème de Cauchy linéaire, J. Funct. Anal. 202 (2003) 123–146.
[13] S.R. Grace, B.S. Lalli, An oscillation criterion for nth order nonlinear differential equations with functional arguments, Canad. Math. Bull. 26 (1) (1983) 35–40.
[14] S.R. Grace, B.S. Lalli, Oscillatory solutions of functional-differential equations generated by deviation of arguments of mixed type, J. Math. Anal. Appl. 108 (1) (1985) 79–91.
[15] J. Hadamard, Équations du type parabolique dépourvues de solutions, J. Ration. Mech. Anal. 3 (1954) 3–12.
[16] M. Kawagishi, Cauchy–Kovalevskaya–Nagumo type theorems for PDEs with shrinkings, Proc. Japan Acad. Ser. A 75 (1999) 184–187.
[17] M. Kawagishi, A generalized Cauchy–Kovalevskaya–Nagumo with shrinkings, Sci. Math. Japon. 54 (1) (2001) 39–50.
[18] M. Kawagishi, T. Yamanaka, On the Cauchy problem for PDEs in the Gevrey class with shrinkings, J. Math. Soc. Japan 54 (3) (2002) 649–677.
[19] M. Kawagishi, T. Yamanaka, The heat equation and the shrinking, Electronic J. Differential Equations 2003 (97) (2003) 1–14.
[20] A. Kubo, M. Reissig, Construction of parametrix to strictly hyperbolic Cauchy problems with fast oscillations in non-Lipschitz coefficients, Comm. Partial Differential Equations 28 (7–8) (2003) 1471–1502.
[21] A. Lada, Multidimensional oscillations for non-linear hyperbolic mixed problem: the justified non-linear geometric optics method, Math. Methods Appl. Sci. 19 (3) (1996) 217–233.
[22] P.D. Lax, Nonlinear hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953) 231–258.
[23] J. Leray, L. Waelbroeck, Norme formelle d'une fonction composée (Préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts), in : Colloque de Liège, CBRM, 1964, pp. 145–152.
[24] J. Leray, Y. Ohya, Equations et systèmes non-linéaires, hyperboliques nonstricts, Math. Ann. 170 (1967) 167–205.
[25] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Proc. Int. Symp. Rio de Janeiro 1977, in: Math. Stud., vol. 30, North-Holland, 1978, pp. 284–346.
[26] I. Petrowski, Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Mat. Sb. 5 (1939) 3–70.
[27] M. Reissig, K. Yagdjian, Weakly hyperbolic equation with fast oscillating coefficients, Osaka J. Math. 36 (2) (1999) 437–464.
[28] M. Reissig, K. Yagdjian, L_p–L_q decay estimates for hyperbolic equations with oscillations in coefficients, Chinese Ann. Math. Ser. B 21 (2) (2000) 153–164.
[29] M. Reissig, K. Yagdjian, About the influence of oscillations on Strichartz-type decay estimates, in: Partial Differential Operators, Torino, 2000, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 58 (3) (2002) 375–388.
[30] V.I. Rodionov, Analytic solution of a linear functional-differential equation with a linear argument deviation, Differentsialnye Uravneniya 25 (4) (1989) 616–626, 733–734, in Russian; translation in: Differential Equations 25 (4) (1989) 417–425.
[31] Cl. Wagschal, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pure Appl. 58 (1979) 309–337.